portanto, pelo teorema de Cayley-Hamilton,

$$V_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

→ rank (V_O) = rank $(V_{oo}(0))$

se rank$(V_O) = n$, então existem n linhas L.I. em (3) e é possível determinar solução única para x_0 (sistema observável)

exemplo 1: $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$

$y = Cx$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$; rank $(V_O) = 1$

sistema não observável.

exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C = [1, 0]$$

$$V_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$; rank $(V_O) = 2$

sistema observável

→ controlabilidade

definição: o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$ é controlável se existe uma entrada $u(t)$ em um intervalo $[0, t_F]$ que leva a qualquer $x(t_F)$ desejado no espaço de estados

→ teste de controlabilidade:

o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é controlável se e só se $\text{rank}(Uc) = n$

Aula 12 → controle por realimentação de saída

→ estimadores de estado

a) estimador em malha aberta

considere o sistema:

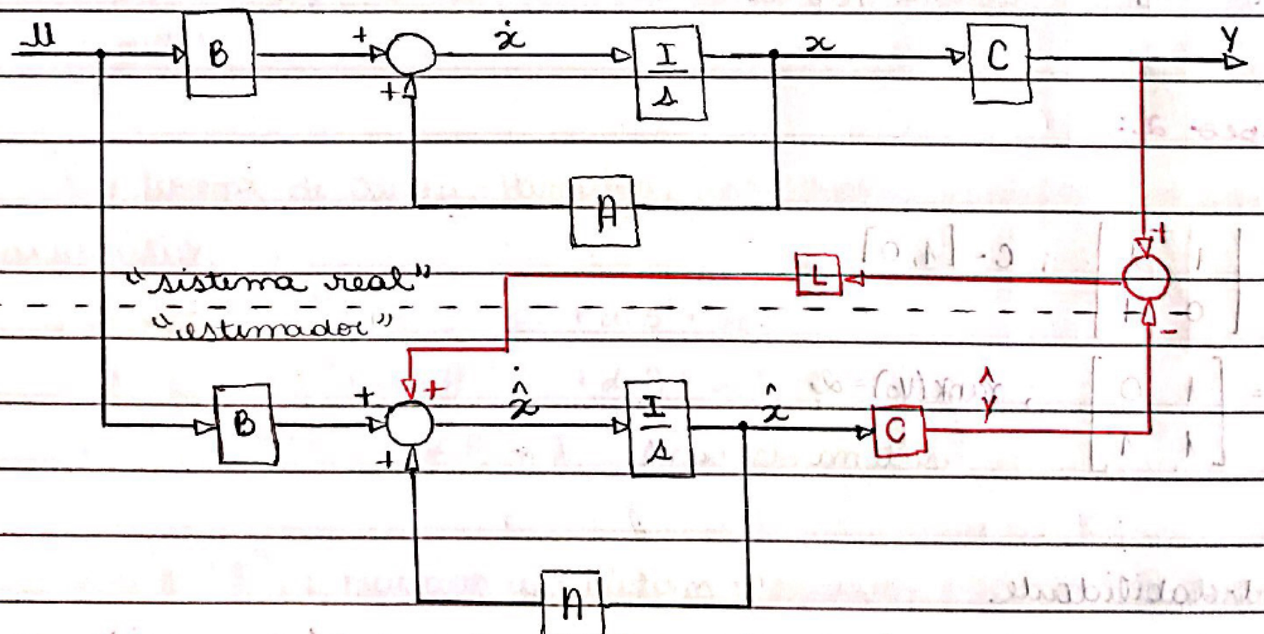
$\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$ (1)

$y = Cx$ (2)

conhecendo A e B pode-se estimar o estado por:

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$ (3)

sendo $\hat{x}$ o estado estimado.



• desvantagens:

→ é necessário conhecer x_0;

→ erro $\tilde{x} = \hat{x} - x$ é cumulativo.

b) Observador com realimentação de saída

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

adições em vermelho ao desenho

$$\dot{\hat{x}} = (A-LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

equacionando a dinâmica do erro $\tilde{x} = \hat{x} - x$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A-LC)\hat{x} + Ly + \cancel{Bu} - Ax - \cancel{Bu} =$$

$$= (A-LC)\hat{x} - (A-L\overset{y}{C})x = (A-LC)\tilde{x}$$

portanto $\dot{\tilde{x}} = (A-LC)\tilde{x}$ e, com isso, vemos que a matriz $(A-LC)$ controla a taxa de decaimento do erro entre o estado estimado e o estado real.

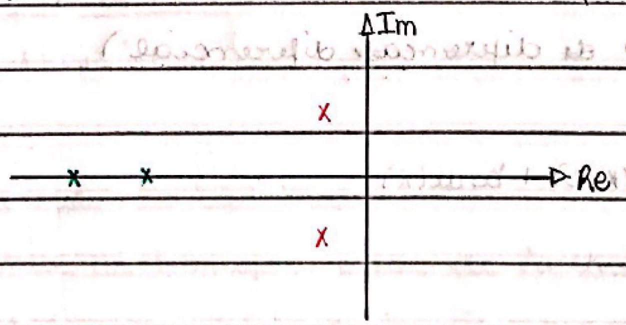
$L \rightarrow$ matriz de ganho de realimentação de saída (variável de projeto)

• projeto do observador:

I. escolher $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$

II. encontrar L tal que $\lambda_i\{A-LC\} = \lambda_i^*$ $\qquad \lambda = \sigma + j\omega$

$i = 1, 2 \ldots n$ $\qquad \xi = -\sigma / \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$



no matlab:

1. controle por realimentação de 'estados'

$P_1 = [\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \ldots \lambda_n^*]^T;$

K= PLACE (A,B,P1);

2. projeto do observador.

$P_2 = [\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \dots \quad \lambda_n^*]^T$

K = PLACE (A^T, C^T, P_2); $\quad K B' = = L$

se $\dot{z} = A^T z + C^T u \qquad A^T + C^T K$

$\bar{y} = B^T z$

é controlável. Portanto, pode-se projetar $\bar{K}$ tal que $\lambda_i\{A^T + C^T\bar{K}\} = \lambda_i^*$,

$i = 1, 2 \dots n$

fazendo $L = -\bar{K}^T \rightarrow \bar{K} = -L^T$

$\lambda_i\{(A^T + C^T\bar{K})\} = \lambda_i\{(A^T - C^T L^T)\} = \lambda_i\{(A - LC)\}$

Aula 13: modelagem e análise de sistemas discretos

→ modelagem de sistemas discretos

- forma padrão de um modelo em espaço de estados

$x(K+1) = Ax(K) + Bu(K), \quad x(0) = x_0$

$y(K) = Cx(K)$

- este modelo corresponde a uma equação de diferenças (análogo discreto de uma equação ~~de diferenças~~ diferencial)

exemplo:

$y(K) = -a_1 y(K-1) - a_2 y(K-2) + b_0 u(K)$

$\begin{cases} x_1(K) = y(K-1) \\ x_2(K) = y(K-2) \end{cases}$

$x_2(K+1) = y(K-2+1) = y(K-1) = x_1(K)$

$x_1(K+1) = y(K-1+1) = y(K) = -a_1 y(K-1) - a_2 (y K-2) + b_0 u(K)$

$= -a_1 x_1(K) - a_2 x_2(K) + b_0 u(K)$

$\therefore$

$$\begin{bmatrix} x_1(K+1) \\ x_2(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(K)$$

$$y(k) = [-a_1 \quad -a_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

- transformada de Laplace é aplicável a sistemas contínuos
- análogo discreto é a transformada Z

$$Z\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

- z^{-1} representa um atraso unitário de tempo

exemplo

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k)$$

$$Z\{y(k)\} = Z\{-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k)\}$$

$$Z\{y(k)\} = -a_1 Z\{y(k-1)\} - a_2 Z\{y(k-2)\} + b_0 Z\{u(k)\}$$

$$y(z) = -a_1 z^{-1} y(z) - a_2 z^{-2} y(z) + b_0 U(z)$$

$$y(z)[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}] = b_0 U(z)$$

$$\frac{y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

→ análise de sistemas discretos

- Relação entre as transformadas de Laplace e Z

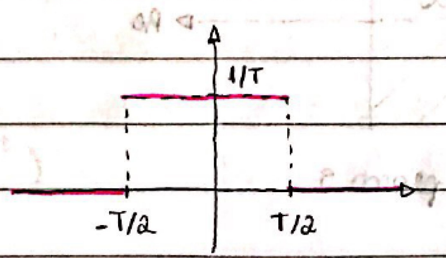
→ séries e transformadas de Fourier: sinais periódicos

→ transformada de Laplace: sinais aperiódicos contínuos

→ como modelar sinais discretos (amostrados) para aplicação da transformada de Laplace?

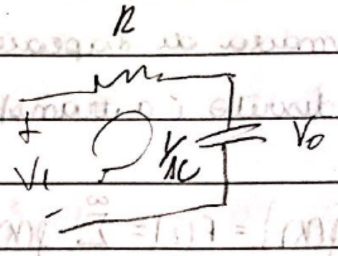
- função pulso:

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & \frac{-T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & t < \frac{-T}{2} \text{ ou } T > \frac{T}{2} \end{cases}$$



- função impulso

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} f_p(t)$$



- função impulso com atraso de tempo

$$\delta(t-1) = \lim_{T \to 0} f_p(t-1)$$

$$\frac{V_c}{V_i} = \frac{1/sC \cdot i}{(R + 1/sC)\, i} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$g^*(t) = \int_0^t g(\tau)\,\delta(\tau - 1)\, d\tau$$

- função impulso pode ser usada para amostragem de uma função contínua.

→ transformada de Laplace da função impulso com atraso:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$$

→ problema: termos exponenciais introduzem não linearidades no domínio s

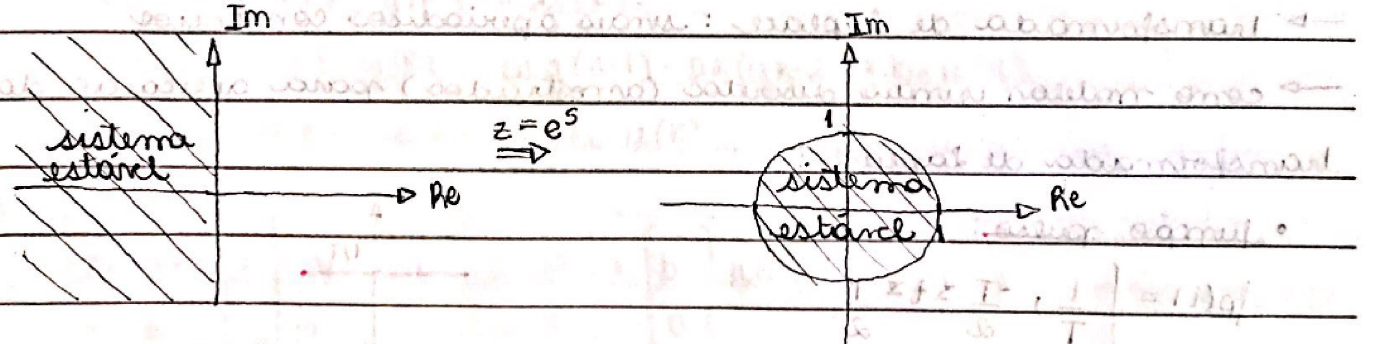
→ solução: usar uma mudança de variáveis

$$z = e^{s}$$

com isso:

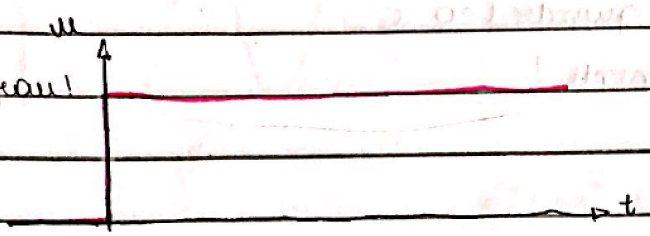
$$\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s} = z^{-1} = z\{\delta(t-1)\}$$

→ implicação para a estabilidade de um modelo de sistema



plano S

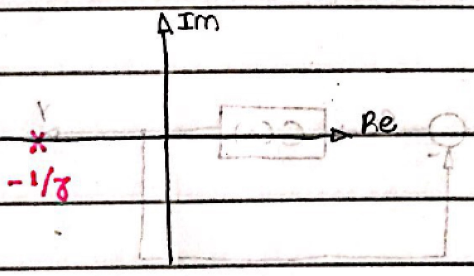
Aula 15: Resposta no tempo de sistemas lineares



perdi o outro gráfico

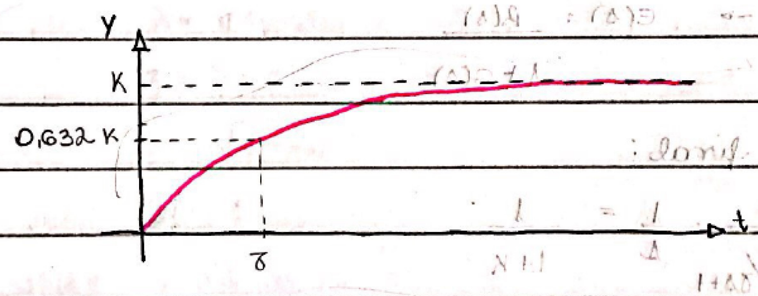
→ sistema de 1^a ordem

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$



K → ganho em regime permanente

τ → constante de tempo



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

teorema do valor final

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

quando o tempo → ∞, o sistema tende a K, seu ganho em regime perm.

p/ o sistema de 1^a ordem c/ aplicação de um degrau unitário:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{\tau s+1} \cdot \frac{1}{s} = K$$

CONSTANTE DE TEMPO

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = K\cdot\left(1 - e^{-1/\tau \cdot t}\right)$$

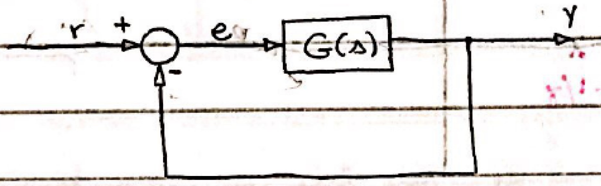
O que significa a constante de tempo?

$e^{-1/\tau \cdot t}$ começa em 1 quando $t=0$ e diminui exponencialmente!

em $t = \tau$:

$$Y(t) = K(1-e^{-1}) \cong 0{,}632 \cdot K$$

ERRO DE REGIME PERMANENTE



$$E(s) = R(s) - Y(s) \rightarrow E(s) = R(s) - G(s)E(s)$$

$$\rightarrow [1 + G(s)]E(s) = R(s) \rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

pelo teorema do valor final:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1+K/\tau s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+K}$$

quanto maior o K menor o erro!

→ sistema de 2ª ordem

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{R}{2 w_n L}$$

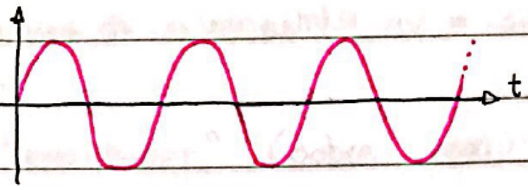
$$G(s) = K \cdot \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

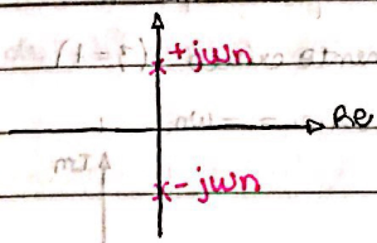
$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

K → ganho em regime permanente

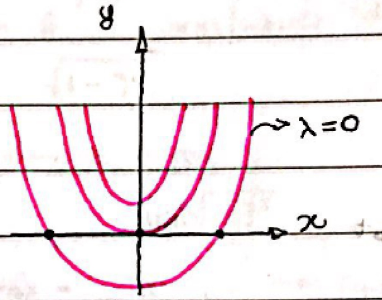
w_n → frequência natural de oscilação não amortecida

ζ → fator de amortecimento





$$s^2 + \omega_n^2 = 0$$



$y = x^2 - \lambda \rightarrow x^2 - \lambda = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\lambda}$

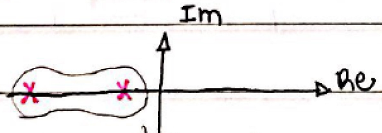
1) sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$)

$\lambda = \sigma + j\omega$

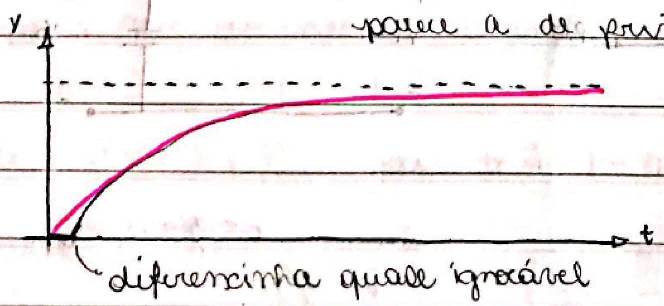
$\zeta = \cancel{\dfrac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}}$ ⤳ essa expressão não funciona nesse caso pois $\zeta > 1$

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ vai ser imag. pois $\zeta > 1$

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$



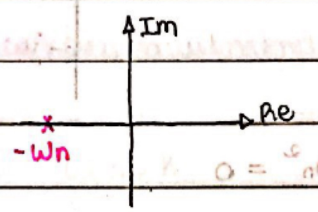
se forem separados por + de 1 década, a resposta parece a de primeira ordem

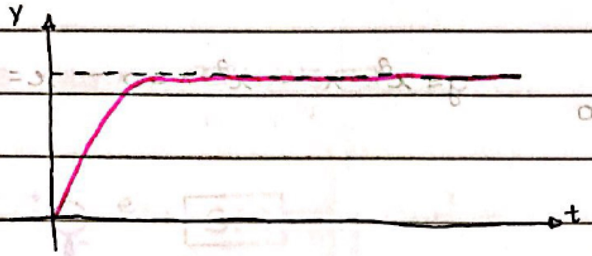


↳ dissipa menos energia, atinge o K mais rápido

2) amortecimento crítico ($\zeta = 1$)

$s_{1,2} = -\omega_n$





Aula 16: índices de desempenho p/ sistema de 2ª ordem

→ forma padrão do sistema de segunda ordem

$$G(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

3) sistema subamortecido ($0 < \zeta < 1$)